【XR-3】等差数列

by xht37 & NaCly_Fish

前置知识

- 模拟或等差数列求和

方法一

因为一共只有 $n \leq 10^6$ 项，所以可以把数列的每一项都求出来然后相加即可，时间复杂度 $\Theta(n)$。

方法二

根据前两项的值算出公差，就可以求出第 n 项，然后用等差数列求和公式 $S = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ 计算即可，时间复杂度 $\Theta(1)$。

【XR-3】小道消息

by meaningful & NaCly_Fish

前置知识

- 简单数论

本题题解

如果 $k+1$ 是质数且 $2(k+1) > n+1$，则答案为 1，因为它一定与 $2 \sim n+1$ 的数（除了自己本身）互质。

否则答案为 2，因为根据伯特兰-切比雪夫定理，$k+1$ 一定与 $2 \sim n+1$ 中最大的质数互质，因此第一天衣服上写有这个最大质数的人一定会得到这条小道消息，那么在第二天所有人都会知道。

时间复杂度即为判断质数的时间复杂度，$\Theta(\sqrt{n})$ 即可。

【XR-3】核心城市

by meaningful

前置知识

- 树的直径与树的中心

本题题解

如果 $k = 1$，则唯一的核心城市显然为树的中心（若直径上有偶数个点，则任意选择中间两个点中的一个）。

当 $k \neq 1$，我们可以把树的中心当成根，然后我们依次将点贪心地加入核心城市中。

定义 f_x 为以树的中心为根时，点 x 离自己子树中的叶子的最大距离。

那么，我们可以每次在与当前确定的核心城市相连的非核心城市中选择 f 最大的城市加入到核心城市中，直到核心城市的数量到 k 为止。这可以用堆实现，时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

【XR-3】系统设计

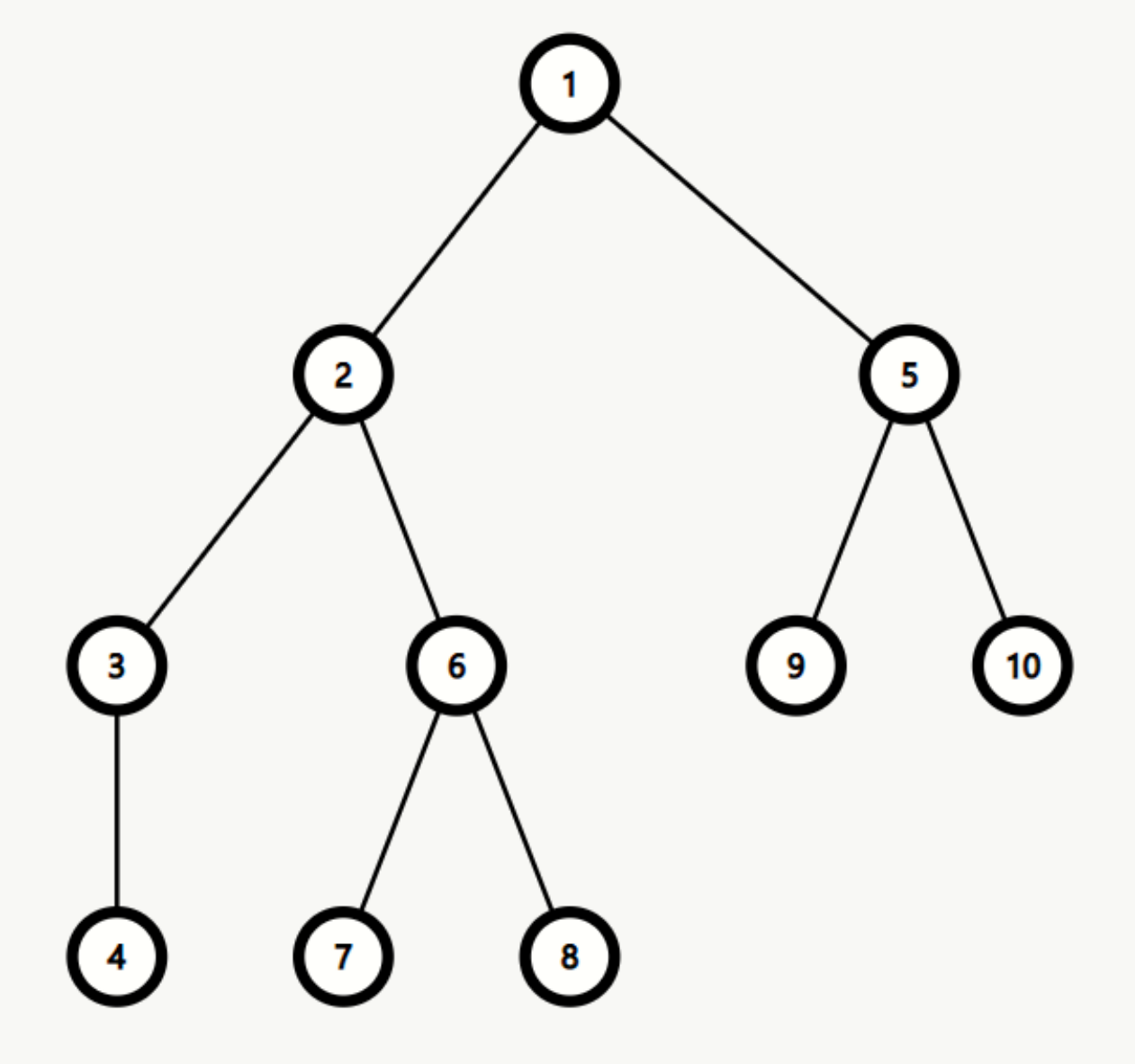
by PinkRabbit

前置知识

- 字符串哈希
- 树状数组/线段树上二分

本题题解

将树上根到节点 u 的简单路径依次经过的边的排名记作一个字符串 s_u。



例如上图中，有：

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \texttt{""}\text{（空串）}\\
s_2 &= \texttt{"1"}\\
s_3 &= \texttt{"11"}\\
s_4 &= \texttt{"111"}\\
s_5 &= \texttt{"2"}\\
s_6 &= \texttt{"12"}\\
s_7 &= \texttt{"121"}\\
s_8 &= \texttt{"122"}\\
s_9 &= \texttt{"21"}\\
s_{10} &= \texttt{"22"}
\end{aligned}
$$

考虑询问 `1 x l r` 时，将 $a_{l..r}$ 也看作一个字符串，并在前面拼上 s_x 这个字符串。

则转化为查询 $str = s_x + a_{l..r}$ 在树中最长能够匹配到哪个点。

举个例子，若 $x = 2, a_{l..r} = \texttt{"231"}$，则 $str = s_2 + a_{l..r} = \texttt{"1231"}$。

最长能匹配上 $s_6 = \texttt{"12"}$，则答案为 6。

考虑字符串哈希，预先处理所有节点表示的字符串的哈希值，并存在哈希表里。

用数据结构维护序列的哈希值，查询时在数据结构上二分，在哈希表中查询是否存在此值即可。

时间复杂度 $\Theta((n + (m + q)\log m) \times T(\text{hash}))$。

【XR-3】Namid[A]me

by EntropyIncreaser

首先介绍如何快速计算 $x^x \bmod P$。注意到模数 $P = 786433$ 非常小，且在题目中给出了模数的一个原根，因此我们可以轻松在 $\Theta(P)$ 的时间内预处理出 $1 \sim P-1$ 每个数的离散对数 $ind[x]$ 以及幂 $pow[k] = g^k \bmod P$。通过欧拉定理即可在 $\Theta(1)$ 时间内计算 $x^x = pow[ind[x]x \bmod (P-1)]$。需要特判 $x \equiv 0 \pmod P$ 的情况。

接下来考虑一条链如何计算。

这样所有链都等价于一个区间，考虑枚举右端 r，那么对于 $[l, r]$ 内所有数的与设为 x_l，注意到若 $x_l \neq x_{l+1}$，由于 $x_l = x_{l+1}$ and a_l，那么必然是至少在 x_{l+1} 中的一个二进制位从 1 变为 0。因此，从 x_l 到 x_1，必然最多只有 $w+1$ 种取值。我们考虑只维护被取到的值分别取到了多少次即可。

接下来注意对于一个有 d 个叶子的子树，在维护时子树内每个节点到子树的根的路径上的与和总共不超过 $d(w+1)$ 种取值，这是因为将每个叶子到根的一条链内的取值各自都不超过 $w+1$。我们只需在 DFS 的过程中维护每个子树内所有能取到的值的出现次数即可。这一部分的复杂度为 $\Theta(ndw)$。在处理子树的时候，我们还需计算路径两端点在不同子树的路径的答案，这一部分我们暴力枚举，注意到两个叶子只会在它们的 LCA 位置为合并的复杂度贡献 $(w+1)^2$，因此计算这一部分答案的总代价为 $\Theta((dw)^2)$。但是同时又有另一个显然的上界：$\Theta(n^2)$，因为只有这么多条路径，而在 nd 总体有限制的这一条件下，考虑不等式 $\min(a, b) \leq \sqrt{ab}$，可知这一部分的复杂度不超过 $\Theta(\min(n, dw)^2) \leq \Theta(ndw)$。

综上所述，本算法的复杂度为 $\Theta(ndw)$。

【XR-3】Unknown Mother-Goose

by Shadowice1984

题目的数据范围很具有迷惑性，可能会让人认为标算是 $\Theta(2^s)$ 的容斥，而 n 只有 10^9 则是为了避免解同余方程时爆 long long。

其实标算是 bitset 大暴力啦。

一个可能的暴力是：开一个长度是 10^9 的布尔数组 a，把是 S 中每一个元素的倍数的下标全部赋值成 1，那么，如果 a_x, a_{x-1}, a_{x+1} 都是 1，x 就是合法的。

如果把暴力中的布尔数组用 bitset 存储，问题就变成了数 bitset 里有几组三个连续的 1，你可以通过一套 & 操作转化为数 popcount。

不过还可以每 64 位分一块，块内算一下内部有几组三个连续的 1，然后算块和块之间有几组三个连续的 1，这个枚举一下即可。

这样的复杂度是 $\Theta(\frac{n}{8})$ 的，因为 popcount 的底层实现实际上是查 65536 长度的表。

下面是如何生成这个 bitset，暴力并不清楚能不能过，因为可以去重，加上特判 1 之后胡乱暴力。

为了跑的快点，你可以根据 S 中的元素是否大于 64 来分情况讨论，如果大于 64 那么暴力的赋值，如果小于等于 64，每一块实际上被按位或的 01 串很快就会出现循环节，直接预处理出这些循环的 01 串，然后按位或即可。

总时间复杂度 $\Theta(\frac{n|S|}{64}+\frac{n}{8})$。

理论复杂度算起来很高，但是寻址连续并且不会频繁调用系统栈（对比大家平时写的算法），所以可以很快的通过。

顺便说一句，建议手写 bitset。